数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 42-43

Group von Neumann algebras associated with non-unimodular locally compact groups

静岡大学 工学部　　関根 義浩 (Yoshihiro Sekine)

1 序論

モジュラー理論における基本的な結果のひとつとして知られている「フォン・ノイマン環 M のモジュラー作用 σ による接合積 $M \rtimes_\sigma \mathbf{R}$ は半有限である」は,「局所コンパクト群 G の $\mathbf{R}$ へのモジュラー関数により定義される作用 α による半直積 $\mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ はユニモジュラーになる」という古典的な結果のアナロジーと考えることができる. 特に, M として局所コンパクト群 G の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(G)$ を考えると, モジュラー作用による接合積 $\lambda(G) \rtimes_\sigma \mathbf{R}$ とユニモジュラー群 $\mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$ という2つの半有限なフォン・ノイマン環が得られる. 素朴な疑問として, これらのフォン・ノイマン環は同型であるかどうか気になるが, 本稿でこれら2つのフォン・ノイマン環の関係について述べたいと思う. ただし, このことについて書かれている文献はないようであるが, 専門家にとってはよく知られていることだと思われる.

2 結果

以下, G を局所コンパクト群とし, G 上の左不変ハール測度を μ とする. Δ を G のモジュラー関数とし, G の実数全体の加法群 $\mathbf{R}$ への作用 α を

$$\alpha_g(t) = \Delta(g)\, t,\ g \in G, t \in \mathbf{R}$$

によって定義すれば, 半直積 $\mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ はユニモジュラーになる. したがって, この群の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$

は半有限である．一方，G の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(G)$ 上の荷重 φ を

$$\text{“ } \varphi\left(\int_G x_g \lambda_g d\mu(g)\right) = x_e \text{ ”}$$

(e は G の単位元) によって定義すれば，モジュラー作用 σ^φ は

$$\sigma_t^\varphi(\lambda_g) = \Delta(g)^{it}\lambda_g,\ g \in G, t \in \mathbf{R}$$

となる．

このとき，次のことが成り立つ．

Proposition 1 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$ は $L^\infty(\mathbf{R}) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ に同型である．ここで，G の $L^\infty(\mathbf{R})$ への作用 $\tilde{\alpha}$ は

$$(\tilde{\alpha}_g(f))(t) = f(\Delta(g)\,t),\ f \in L^\infty(\mathbf{R}), g \in G, t \in \mathbf{R}$$

により与えられる．

Proposition 2 $\lambda(G) \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbf{R}$ は $L^\infty(\mathbf{R}) \rtimes_\beta G$ に同型である．ここで，G の $L^\infty(\mathbf{R})$ への作用 β は

$$(\beta_g(f))(t) = f(t + \log\Delta(g)),\ f \in L^\infty(\mathbf{R}), g \in G, t \in \mathbf{R}$$

により与えられる．

Corollary 3 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$ は $(\lambda(G) \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbf{R}) \oplus (\lambda(G) \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbf{R})$ に同型である．